Forme biliniare și forme pătratice

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Forme bilinare. Definiţii, proprietăţi generale

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 1 *O aplicaţie $g : V \times V \to K$ se numeşte **formă biliniară** pe V dacă satisface condiţiile:*
(i) $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z})$, $\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (g este operator liniar în raport cu primul argument),
(ii) $g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z})$, $\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (g este operator liniar în raport cu al doilea argument).

Vom nota cu $\mathcal{L}_2(V) = \{g : V \times V \to K \mid g$ este formă biliniară$\}$.

Dacă g, h sunt două forme biliniare și $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $g + h,\ \alpha g :\ V \times V \to K$, sunt definite prin $(g + h)(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{y})$, $(\alpha g)(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$. Evident $g + h,\ \alpha g \in \mathcal{L}_2(V)$.

Propoziţia 2 *Mulţimea $\mathcal{L}_2(V)$, împreună cu adunarea formelor biliniare și înmulțirea formelor biliniare cu scalari din K, este un spaţiu vectorial peste K, numit spaţiul vectorial al formelor biliniare definite pe K–spaţiul vectorial V.*

Presupunem acum că V are dimensiunea finită n. Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază în V. Fie $g \in \mathcal{L}_2(V)$ şi $\vec{x}, \vec{y} \in V$ cu descompunerea

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j.$$

Atunci vom obţine

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\ g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\ g_{ij}, \tag{1}$$

unde $g_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

Expresia (1) reprezintă **expresia în coordonate a formei biliniare** g în raport cu baza B.

Vom nota cu $G = M_B(g) = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ și o numim **matricea formei biliniare** g în raport cu baza B. Astfel, folosind (1), obţinem **expresia matriceală a formei biliniare** g în raport cu baza B

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot G \cdot Y,$$

unde X, Y reprezintă matricile coloană ale coordonatelor vectorilor $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ în baza B.

Corolarul 3 *Fie B o bază fixată în V_n. Atunci aplicația $\xi_B\ :\ \mathcal{L}_2(V) \to \mathcal{M}_n(K)$, ce asociază oricărei forme biliniare matricea ei în raport cu baza B, este un izomorfism de spații liniare. Deci dimensiunea spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V)$ este* $\dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$.

Prezentăm în continuare cum se schimbă matricea G la o schimbare de baze. Fie $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ o nouă bază în V cu $S = (s^i_j)_{i,j\in\overline{1,n}}$ matricea schimbării de baze, $B \xrightarrow{S} \bar{B}$. Atunci $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^n s^i_j \vec{e}_i$ şi, notând $\bar{G}_{ij} = g(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$, $\bar{G} = (\bar{g}_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, obţinem

$$\bar{g}_{ij} = g(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = g\left(\sum_{k=1}^n s^k_i \vec{e}_k, \sum_{l=1}^n s^l_j \vec{e}_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s^k_i s^l_j g(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s^k_i s^l_j\, g_{kl},\ i, j \in \overline{1,n}.$$

Am obţinut următoarea **formulă matriceală de schimbare a coordonatelor la schimbarea de baze**

$$\bar{G} = S^t \cdot G \cdot S. \tag{2}$$

Observăm că rangul matricelor $\bar{G}$ și G este același, deoarece S este nesingulară, deci rangul matricei formei biliniare este invariant la schimbări de baze

Definiţia 4 *Rangul unei forme biliniare este rangul matricii sale într-o bază oarecare a lui V.*

Definiţia 5 *O formă biliniară se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului liniar V (şi degenerată în caz contrar).*

Definiţia 6 *O formă biliniară g se numeşte simetrică dacă $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$, pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in V$.*

Se poate arăta ușor că:

Propoziţia 7 *O formă biliniară g este simetrică dacă şi numai dacă există o bază a lui V în raport cu care matricea formei este simetrică. (În acest caz, matricea lui g în raport cu oricare bază a lui V este simetrică.)*

2 Forme pătratice. Definiţii, proprietăţi generale

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 8 *O aplicaţie $h : V \to K$ se numeşte **formă pătratică** pe V dacă există o formă biliniară simetrică $g \in \mathcal{L}_2(V)$ astfel încât*

$$h(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x}),\ \forall \vec{x} \in V. \tag{3}$$

Notăm cu $\mathcal{P}(V)$ mulțimea formelor pătratice definite pe V.
Suma a două forme pătratice $h_1, h_2 \in \mathcal{P}(V)$ se definește prin $(h_1 + h_2)(\vec{x}) = h_1(\vec{x}) + h_2(\vec{x})$, înmulțirea formei pătratice $h \in \mathcal{P}(V)$ cu scalarul $\alpha \in K$ se definește prin $(\alpha h)(\vec{x}) = \alpha h(\vec{x})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

Propoziţia 9 *Mulţimea tuturor formelor pătratice $h : V \to K$ este un spaţiu vectorial peste K, în raport cu adunarea formelor pătratice și înmulțirea cu scalari a acestora.*

Propoziţia 10 *Dacă h este o formă pătratică atunci forma biliniară simetrică g de la care provine este unic determintată.*

Demonstra. Din (3) obţinem

$$\begin{aligned} h(\vec{x} + \vec{y}) &= g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{x}) + g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{y}, \vec{x}) + g(\vec{y}, \vec{y}) \\ &= g(\vec{x}, \vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{y}, \vec{y}) = h(\vec{x}) + h(\vec{y}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

deci g este unic determinată prin

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[h(\vec{x} + \vec{y}) - h(\vec{x}) - h(\vec{y})\right],\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V. \tag{4}$$

■

Forma biliniară, simetrică, g , din care provine forma pătratică h se numește **forma polară** a formei pătratice h.

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază în V_n. Fie h o formă pătratică, g forma sa polară şi $\vec{x} \in V$ dat de descompunerea $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$. Atunci vom obţine

$$\begin{aligned} h(\vec{x}) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) = \text{(din liniaritate)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, g_{ij}. \end{aligned} \tag{5}$$

Expresia (5) reprezintă **expresia în coordonate a formei pătratice** h în raport cu baza B. Folosind matricea G a lui g în baza B obţinem şi **expresia matriceală a formei pătratice** h în raport cu baza B

$$h(\vec{x}) = X^t \cdot G \cdot X, \tag{6}$$

unde X reprezintă matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza B.

Definiţia 11 *Matricea unei forme pătratice h în raport cu o bază B a lui V este prin definiţie matricea G a formei biliniare polare în raport cu B, iar rangul unei forme pătratice este rangul acestei matrice.*

Definiţia 12 *O formă pătratică se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului V, și degenerată în caz contrar.*

Exerciţiul 13 *Fie forma pătratică $h(\vec{x}) = h(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$. Forma polară g a lui h se obține folosind formulele (6), (4). Observăm astfel că **forma polară** a lui h **se obţine prin dedublare** din g.*

Mai precis, urmăm următoarele asocieri:

$$\begin{aligned} &(x_i)^2 = x_i x_i \rightsquigarrow x_i y_i, \\ &x_i x_j = \frac{1}{2}x_i x_j + \frac{1}{2}x_i x_j \rightsquigarrow \frac{1}{2}x_i y_j + \frac{1}{2}x_j y_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Deci avem

$$h(\vec{x}) = h(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 2 \cdot 2x_1x_3 + 3 \cdot 2x_2x_3$$

şi prin dedublare obţinem

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, \vec{y}) &= g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2x_1y_3 + 2y_1x_3 + 3x_2y_3 + 3y_2x_3 \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2. \end{aligned}$$

Calculăm $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ şi obţinem matricea G a lui h în raport cu baza canonică

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că putem obține matricea G a lui h în raport cu baza canonică direct din expresia lui h, mai exact g_{ij} este jumătatea coeficientului lui x_ix_j,pentru $i \neq j$, iar g_{ii} coincide cu coeficientul lui $(x_i)^2$. Rangul matricii este $\operatorname{rang} h = \operatorname{rang} G = 3$, *deci h este nedegenerată.*

Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 14 *Fie h forma pătratică ce are, în raport cu baza B, expresia $h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\ g_{ij}$, pentru $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Spunem că forma pătratică h este redusă la* ***forma canonică*** *dacă s-a găsit o bază $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ a lui V, în raport cu care expresia în coordonate a lui h este*

$$h(\vec{x}) = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \cdots + \lambda_n (y_n)^2, \tag{8}$$

unde $\vec{x} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \cdots + y_n\vec{f}_n$ și $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ nu sunt, în mod necesar, toţi nenuli.

Definiţia 15 *Presupunem că V_n este spațiu liniar* ***real****. O formă pătratică h se numeşte*
- pozitiv definită dacă $h(\vec{x}) \gneq 0\, \forall \vec{x} \in V \backslash \{\overrightarrow{0}\}$;
- negativ definită dacă $h(\vec{x}) \lneq 0\, \forall \vec{x} \in V \backslash \{\overrightarrow{0}\}$;
- pozitiv semidefinită dacă $h(\vec{x}) \geq 0\, \forall \vec{x} \in V$ și există cel puțin un $\vec{x} \in V$, nenul, cu $h(\vec{x}) = 0$;
- negativ semidefinită dacă $h(\vec{x}) \leq 0\, \forall \vec{x} \in V$ și există cel puțin un $\vec{x} \in V$, nenul, cu $h(\vec{x}) = 0$;
-nedefinită dacă există $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a.i. $h(\vec{x}) \lneq 0$ şi $h(\vec{y}) \gneq 0$.

Deducem imediat că dacă h are forma canonică (8), atunci h este
- pozitiv definită dacă și numai dacă toţi cei n coeficienţi λ_i sunt strict pozitivi;
- negativ definită dacă și numai dacă toţi cei n coeficienţi λ_i sunt strict negativi;
- pozitiv semidefinită dacă și numai dacă toţi cei n coeficienţi λ_i sunt pozitivi sau nuli;
- negativ semidefinită dacă și numai dacă toţi cei n coeficienţi λ_i sunt negativi sau nuli;
- nedefinită dacă și numai dacă există coeficienţi strict pozitivi şi coeficienţi strict negativi în forma canonică a lui h.

Dar oare există baze $\bar{B}$ în raport cu care expresia unei forme pătratice să fie de forma canonică (8)?

Răspunsul este afirmativ, prezentăm trei metode de aducere la forma canonică- **metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi** şi **metoda** diagonalizării. (după ce vom preda spațiile liniare euclidiene vom vedea că ultima metodă e de fapt metoda transformărilor ortogonale).

Teorema 16 (Metoda lui Gauss) *Fie h o formă pătratică. Atunci există cel puţin o bază $\bar{B}$ a lui V şi corespunzător acesteia există scalarii $\lambda_1, ..., \lambda_n$, în raport cu care expresia în coordonate a lui h are forma canonică (8).*

Remarca 17 *Demonstraţia teoremei lui Gauss ne oferă şi algoritmul practic de reducere la forma canonică a unei forme pătratice h, precum şi modul de determinare al bazei $\bar{B}$. Astfel, conform demonstraţiei teoremei, avem următoarele situaţii:*
1. *dacă forma pătratică conţine cel puţin un pătrat $(x_i)^2$, atunci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_i şi formăm expresii de forma $(ax_i \pm bx_j \pm cx_k \pm ....)^2$;*
2. *dacă forma pătratică nu conţine nici un pătrat dar apare termenul $x_i x_j$, atunci facem schimbarea de variabilă*

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k,\ \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

Prin înlocuirea în formă pătratică, vor apărea pătratele $(y_i)^2$ şi $(y_j)^2$, deci suntem în primul caz.

Exerciţiul 18 *Se dă forma pătratică*

$$h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ h(\vec{x})=5(x_1)^2+6(x_2)^2+4(x_3)^2-4x_1x_2-4x_1x_3,\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine h, să se determine matricea formei pătratice în raport cu baza canonică şi să se calculeze rangul formei.

Să se aducă forma pătratică la forma canonică prin ***metoda lui Gauss****.*

Rezolvare:

Forma biliniară polară se scrie folosind tehnica de dedublare (vezi (7)) şi obţinem

$$\begin{aligned} g(\vec{x},\vec{y}) &= 5x_1y_1+6x_2y_2+4x_3y_3-4\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)-4\frac{1}{2}(x_1y_3+x_3y_1) \\ &= 5x_1y_1+6x_2y_2+4x_3y_3-2x_1y_2-2x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1,\ \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Sau folosim

$$h(\vec{x})=X^t\cdot G\cdot X,\ g(\vec{x},\vec{y})=X^t\cdot G\cdot Y,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$, Y este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{y}$, iar G este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare h.

Avem

$$G=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rangul formei va fi atunci $\operatorname{rang}G=3$*, adică forma biliniară (şi cea pătratică) este nedegenerată.*

Aducem acum forma pătratică la forma canonică. În cazul nostru, apare pătratul $5(x_1)^2$ şi termenii x_1x_2, x_1x_3. Apare şi pătratul $6(x_2)^2$ şi apoi x_1x_2. Alegem, pentru simplitate, să plecăm de la x_2, deci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_2 şi formăm un binom la pătrat

$$\begin{aligned} &h(\vec{x})=\left(6(x_2)^2-4x_1x_2\right)+5(x_1)^2+4(x_3)^2-4x_1x_3 \\ &=\frac{1}{6}\left((6x_2)^2-24x_1x_2\right)+5(x_1)^2+4(x_3)^2-4x_1x_3 \\ &=\frac{1}{6}(6x_2-2x_1)^2-\frac{1}{6}(2x_1)^2+5(x_1)^2+4(x_3)^2-4x_1x_3 \\ &=\frac{1}{6}(6x_2-2x_1)^2+\left(4(x_3)^2-4x_1x_3\right)+\frac{13}{3}(x_1)^2 \\ &=\frac{1}{6}(6x_2-2x_1)^2+\frac{1}{4}\left((4x_3)^2-16x_1x_3\right)+\frac{13}{3}(x_1)^2 \\ &=\frac{1}{6}(6x_2-2x_1)^2+\frac{1}{4}(4x_3-2x_1)^2-\frac{1}{4}(2x_1)^2+\frac{13}{3}(x_1)^2 \\ &=\frac{1}{6}(6x_2-2x_1)^2+\frac{1}{4}(4x_3-2x_1)^2+\frac{10}{3}(x_1)^2 \\ &=\frac{1}{6}(y_1)^2+\frac{1}{4}(y_2)^2+\frac{10}{3}(y_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1=-2x_1+6x_2 \\ y_2=-2x_1+4x_3 \\ y_3=x_1. \end{cases} \tag{9}$$

Deoarece toţi coeficienţii $1/6, 3/13$ şi $40/13$ sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

Să determinăm în continuare baza $\bar{B}$ în raport cu care forma pătratică h are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul de mai sus astfel încât să determinăm coordonatele x_i în raport de coordonatele y_j. Vom obţine

$$\begin{cases} x_1 = y_3 \\ x_2 = \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{2}y_3\,. \end{cases}$$

Știm că formula schimbării de coordonate la schimbarea de baze este

$$X = SY,$$

deci

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Evident puteam citi şi direct din (9) matricea $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, folosind* $Y = S^{-1}X$.

Dar, prin definiţie, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \left\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right\}$ *în raport cu care forma pătratică h are forma canonică* $h(\vec{x}) = \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2)^2 + \frac{10}{3}(y_3)^2$.

Pe coloanele ei sunt coordonatele vectorilor noii baze, $\vec{f_1} = (0, 1/6, 0)$, $\vec{f_2} = (0, 0, 1/4)$, $\vec{f_3} = (1, 1/3, 1/2)$.

Evident, din forma canonică, deducem că forma pătratică are în raport cu această nouă bază matricea $\bar{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. *Într-adevăr, conform formulei de schimbare a matricei G la schimbare de baze,*

$$\bar{G} = S^t G S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

Evident că putem obține și alte forme canonice pentru forma pătratică h.

Teorema 19 (Metoda lui Jacobi) *Fie h o forma pătratică pe V_n astfel încât $\mathrm{rang} h = n$. Atunci există o bază B a lui V în care determinanţii*

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt toţi nenuli, şi există o bază $\bar{B} = \{\vec{f_1}, ..., \vec{f_n}\}$ *a lui V în raport cu care expresia în coordonate a lui h are forma canonică Jacobi*

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_1}(y_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y_2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y_n)^2,$$

unde $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \vec{f_i}$.

Remarca 20 *Prezentăm în continuare tehnica concretă de găsire a bazei* $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ *în raport cu care are loc scrierea canonică a lui* h. *Am luat, pentru simplitatea expunerii, cazul* $n = 3$. *Căutăm noua bază astfel încât*

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \,. \end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} *se face impunând condiţiile suplimentare*

$$g(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j, \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

Obţinem astfel sistemele

$$g(\vec{f}_1, \vec{e}_1) = 1 \Leftrightarrow g(c_{11}\vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11}g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = c_{11}g_{11} = 1, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \begin{cases} g(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ g(\vec{f}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ g(c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21}g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{22}g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{21}g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{22}g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21}g_{11} + c_{22}g_{21} = 0, \\ c_{21}g_{12} + c_{22}g_{22} = 1 \end{cases} \end{gathered} \tag{11}$$

şi respectiv

$$\begin{gathered} \begin{cases} g(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ g(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ g(\vec{f}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ g(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ g(\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{32}g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + c_{33}g(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{31}g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{32}g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + c_{33}g(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ c_{31}g(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + c_{32}g(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + c_{33}g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}g_{11} + c_{32}g_{21} + c_{33}g_{31} = 0, \\ c_{31}g_{12} + c_{32}g_{22} + c_{33}g_{32} = 0, \\ c_{31}g_{13} + c_{32}g_{23} + c_{33}g_{33} = 1. \end{cases} \end{gathered} \tag{12}$$

Rezolvând aceste sisteme găsim coeficienții c_{ij} *deci și vectorii bazei Jacobi.*

Exerciţiul 21 *Se dă forma pătratică* h *de la Exerciţiul 18. Să se aducă forma pătratică* h *la forma canonică prin metoda lui Jacobi.*

Rezolvare:

Matricea formei pătratice este

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculăm determinanţii

$$\Delta_1 = 5, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Deci forma canonică va fi

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5}(y_1)^2 + \frac{5}{26}(y_2)^2 + \frac{13}{40}(y_3)^2 \,.$$

Pentru a determina baza $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în care are loc această scriere canonică a lui h, considerăm că relaţiile de legătură dintre $\vec{f}_i$ şi $\vec{e}_j$ sunt următoarele:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3\,. \end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} se face impunând condiţiile suplimentare anterioare

$$g(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, \ \textit{dacă } i = j, \\ 0, \ \textit{dacă } i \neq j \end{cases}$$

În cazul nostru sistemele (10–12) de mai sus devin, în particular,

$$5c_{11} = 1 \Leftrightarrow c_{11} = 1/5,$$

$$\begin{cases} 5c_{21} - 2c_{22} = 0, \\ -2c_{21} + 6c_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{21} = 1/13, \ c_{22} = 5/26$$

şi respectiv

$$\begin{cases} 5c_{31} - 2c_{32} - 2c_{33} = 0, \\ -2c_{31} + 6c_{32} = 0, \\ -2c_{31} + 4c_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{31} = 3/20, \ c_{32} = 1/20, \ c_{33} = 13/40.$$

Prin urmare noua bază în raport cu care h are forma canonică este

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \frac{1}{5}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \frac{1}{13}\vec{e}_1 + \frac{5}{26}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \frac{3}{20}\vec{e}_1 + \frac{1}{20}\vec{e}_2 + \frac{13}{40}\vec{e}_3\,. \end{cases}$$

Matricea schimbării de baze este

$$S = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{pmatrix}.$$

Remarca 22 *Cea de a treia metodă este **diagonalizarea lui** G.*

Fie forma pătratică h dată de $h(\bar{u}) = X^t \cdot G \cdot X$. Fie transformarea liniară T care are drept matrice tot pe G, în raport cu aceeași bază. Deoarece G este simetrică, se poate arăta că ea are valori proprii reale şi simple . Din teorema de diagonalizare rezultă că există o nouă bază $\bar{B}$ şi în raport cu aceasta matricea lui T este diagonală, având valorile proprii pe diagonala principală, şi deci h va avea o formă canonică în raport cu această nouă bază $\bar{B}$.

Exerciţiul 23 *Se dă forma pătratică h de la Exerciţiul 18. Să se aducă forma pătratică h la forma canonică prin diagonalizarea lui G.*

Rezolvare:

Matricea formei pătratice este

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică asociată matricei G este

$$p(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = 0,$$

deci, efectuând calculele, obţinem

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 66\lambda + 80 = 0.$$

Căutăm rădăcinile întregi printre divizorii întregi ai termenului liber şi folosim eventual schema lui Horner. Obținem

$$\det(G - \lambda I_3) = -(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-8) = 0,$$

şi deci rădăcinile caracteristice sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 5$, *toate simple. Acestea fiind din câmpul de scalari, ele sunt chiar valori proprii.*

Vom determina acum subspaţiile proprii $V(2)$, $V(5)$ *şi* $V(8)$ *corespunzătoare celor trei valori proprii găsite. Avem*

$$V(\lambda) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) \mid G - \lambda I_3 X = 0\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Pentru determinarea lui $V(2)$, *rezolvăm, prin urmare, sistemul liniar şi omogen (13):*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este 2, *deci sistemul are două necunoscute principale,* x_1, x_2, *şi o necunoscută secundară,* $x_3 = \alpha$. *Vom obţine*

$$V(2) = \{\alpha(2,1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

adică $\{\vec{f_1} = (2,1,2)\}$ *este bază în* $V(2)$.

Analog

$$V(5) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) \mid (A - 5I_3)X = 0\}$$

şi sistemul liniar şi omogen $(A - 5I_3)X = 0$ *este*

$$\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

care are soluţia $X = \alpha(1,2,-2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Deci*

$$V(5) = \{\alpha(1,2,-2) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

deci $\{\vec{f_2} = (1,2,-2)\}$ *este bază în* $V(5)$.

Analog $V(8) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) \mid (G - 8I_3)X = 0\}$ *şi sistemul liniar şi omogen* $(G - 8I_3)X = 0$ *este*

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Deci

$$V(8) = \{\alpha(2,-2,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

prin urmare $\{\vec{f_3} = (2,-2,-1)\}$ *este bază în* $V(5)$.

Observăm, mai întâi că, dacă notăm prin T *endomorfismul care are drept matrice pe* G*, atunci, conform teoremei de diagonalizare, endomorfismul* T *este diagonalizabil (rădăcinile caracterisitice sunt din câmpul de scalari, i.e.* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,3}$ *şi sunt toate simple).*

În raport cu baza $\bar{B} = \left\{\vec{f_1} = (2,1,2), \vec{f_2} = (1,2,-2), \vec{f_3} = (2,-2,-1)\right\}$, T *are matricea*

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Deci forma canonică a formei pătratice este atunci

$$h(\vec{x}) = 2(y_1)^2 + 5(y_2)^2 + 8(y_3)^2,$$

unde y_i, $i = \overline{1,3}$ *sunt coordonatele lui* $\vec{x}$ *în baza* $\bar{B}$.

O consecință imediată a acestei ultime metode de aducere la forma canonică a unei forme pătratice este că forma canonică e de tipul $h(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y^i\right)^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei lui h în raport cu baza canonică. Deci h este pozitiv definită dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricei sale sunt strict pozitive.

Interesant este că am găsit trei forme canonice diferite ale aceleiași forme pătratice h.
Toate trei sunt pozitiv definite ăn cazul acestui exemplu.

Se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 24 ***(Teorema inerției a lui Sylvester)*** *Fie* V_n *un spațiu liniar* ***real****. Toate formele canonice ale unei forme pătratice au același număr de coeficienți strict negativi și același număr de coeficienți strict pozitivi.*

Definiţia 25 *Fie* $h \in \mathcal{P}(V_n)$*. Numim indicele pozitiv de inerție (indicele negativ de inerție) al lui* h *numărul coeficienților strict pozitivi (respectiv strict negativi) ai unei forme canonice a lui* h*. Îi notăm* $i_+(h)$, $i_-(h)$.

Dacă rangul formei pătratice este de exemplu $r \leq n$, atunci evident $i_+(h) + i_-(h) = r$.

Putem asocia unei forme pătratice reale și o formă canonică unică, pe care o numim **forma normală**, astfel.

Presupunem că în raport cu o bază $B = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$, $h \in \mathcal{P}(V_n)$ are forma canonică

$$h(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x_i)^2 + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{p+j} (x_{p+j})^2, \ \lambda_i > 0, \forall i \in \overline{1,p}, \ \lambda_{p+j} < 0, \forall j \in \overline{1,q}.$$

Facem schimbarea de coordonate $\begin{cases} y_i & = \sqrt{\lambda_i} x_i, \ i \in \overline{1,p}, \\ y_{p+j} & = \sqrt{-\lambda_{p+j}}, \ j \in \overline{1,q}, \\ y_{p+q+k} & = x_{p+q+k}, \ k \in \overline{1, n-p-q}. \end{cases}$ În raport cu noua bază indusă de schimbarea de coordonate, forma canonică a lui h devine

$$h(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{p} (y_i)^2 - \sum_{j=1}^{q} (y_{p+j})^2.$$

Aceasta este forma normală a lui h.

Pentru forma canonică $h(\vec{x}) = 2(y_1)^2 + 5(y_2)^2 + 8(y_3)^2$, făcând schimbarea de coordonate $\begin{cases} z_1 &= \sqrt{2}y_1, \\ z_2 &= \sqrt{5}y_2, \\ z_3 &= 2\sqrt{2}y_3, \end{cases}$ obținem forma normală

$$h(\vec{x}) = (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2 .$$

3 Exerciţii

1. Să se studieze dacă aplicaţiile g de mai jos sunt forme biliniare. În caz afirmativ să se precizeze dacă sunt simetrice sau nu şi să se determine matricea formei g în raport cu baza canonică.

   (a) $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + 1, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$;

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$;

   (c) $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_4, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$;

   (d) $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$.

   Rezolvare:

   (a) Folosind definiţia, trebuie deci să verificăm condiţiile

$$\begin{array}{l} g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z}) \\ g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3. \end{array} \tag{14}$$

   Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$, obţinem că

$$\begin{array}{l} g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1) z_3 - (\alpha x_3 + \beta y_3) z_1 + 1 \\ = \alpha x_1 z_2 + \beta y_1 z_2 - \alpha x_2 z_1 - \beta y_2 z_1 + \alpha x_1 z_3 + \beta y_1 z_3 - \alpha x_3 z_1 - \beta y_3 z_1 + 1 \\ = \alpha (x_1 z_2 - x_2 z_1 + x_1 z_3 - x_3 z_1) + \beta (y_1 z_2 - y_2 z_1 + y_1 z_3 - y_3 z_1) + 1. \end{array}$$

   Pe de altă parte,

$$\begin{array}{l} \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z}) = \alpha (x_1 z_2 - x_2 z_1 + x_1 z_3 - x_3 z_1 + 1) + \beta (y_1 z_2 - y_2 z_1 + y_1 z_3 - y_3 z_1 + 1) \\ = \alpha (x_1 z_2 - x_2 z_1 + x_1 z_3 - x_3 z_1) + \beta (y_1 z_2 - y_2 z_1 + y_1 z_3 - y_3 z_1) + (\alpha + \beta). \end{array}$$

   Deci există α, β reali, cu $(\alpha + \beta) \neq 1$ a.i. $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) \neq \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z})$, prin urmare g nu este formă biliniară.

   Evident dacă nu ar apărea cosntanta 1 în definiţia lui g, atunci g ar fi formă biliniară.

   (b) Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$, obţinem că

$$\begin{array}{l} g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 - (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 \\ = \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 - \alpha x_1 z_2 - \beta y_1 z_2 - \alpha x_2 z_1 - \beta y_2 z_1 + 2\alpha x_2 z_2 + 2\beta y_2 z_2 \\ = \alpha (x_1 z_1 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + 2x_2 z_2) + \beta (y_1 z_1 - y_1 z_2 - y_2 z_1 + 2y_2 z_2) \\ = \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z}). \end{array}$$

   Deoarece $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)$, obţinem că

$$\begin{array}{l} g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = x_1 (\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1 (\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2 (\alpha y_1 + \beta z_1) + 2x_2 (\alpha y_2 + \beta z_2) \\ = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 z_1 - \alpha x_1 y_2 - \beta x_1 z_2 - \alpha x_2 y_1 - \beta x_2 z_1 + 2\alpha x_2 y_2 + 2\beta x_2 z_2 \\ = \alpha (x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2) + \beta (x_1 z_1 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + 2x_2 z_2) \\ = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z}). \end{array}$$

   Prin urmare g este formă biliniară.

   Evident

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 = g(\vec{y}, \vec{x}),$$

   ceea ce înseamnă că forma biliniară g este simetrică.
   Facem observația că dacă verificam mai întâi simetria lui g, era suficient să demonstrăm că g este liniară doar în primul argument. Automat, din simetrie, rezulta că ea e liniară și în al doilea argument.

Matricea formei biliniare g în raport cu baza canonică se scrie calculând $g_{ij} := g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = \overline{1,2}$, unde $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

Obţinem că $g_{11} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$, $g_{22} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 2$, $g_{12} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -1$, $g_{21} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -1$, adică matricea formei biliniare este

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm de asemenea că forma biliniară se scrie matriceal astfel:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot G \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{y}$.

(c) Deoarece

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_4 \neq g(\vec{y}, \vec{x}),$$

rezultă că g nu este simetrică.

Suntem nevoiți să verificăm liniaritatea în ambele argumente.

Deoarece $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$, obţinem că

$$\begin{aligned}
&g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = 2(\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 + 3(\alpha x_3 + \beta y_3) z_3 \\
&\quad + (\alpha x_4 + \beta y_4) z_1 + (\alpha x_4 + \beta y_4) z_4 \\
&= 2\alpha x_1z_1 + 2\beta y_1z_1 + \alpha x_2z_1 + \beta y_2z_1 + \alpha x_2z_2 + \beta y_2z_2 + 3\alpha x_3z_3 + 3\beta y_3z_3 + \alpha x_4z_1 + \beta y_4z_1 \\
&\quad + \alpha x_4z_4 + \beta y_4z_4 \\
&= \alpha(2x_1z_1 + x_2z_1 + x_2z_2 + 3x_3z_3 + x_4z_1 + x_4z_4) + \beta(2y_1z_1 + y_2z_1 + y_2z_2 + 3y_3z_3 + y_4z_1 + y_4z_4) \\
&= \alpha g(\vec{x}, \vec{z}) + \beta g(\vec{y}, \vec{z}),
\end{aligned}$$

adică este satisfăcută prima condiţie din (14) (de liniaritate în raport cu primul argument).

Scriind $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)$, obţinem că în mod similar că $g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z})$, adică este satisfăcută a doua condiţie din (14) (de liniaritate în raport cu al doilea argument).

Fie $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^4$.

Obţinem că:

$g_{11} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 2$, $g_{22} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1$, $g_{33} := g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 3$, $g_{44} := g(\vec{e}_4, \vec{e}_4) = 1$,

$g_{12} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$, $g_{13} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$, $g_{14} := g(\vec{e}_1, \vec{e}_4) = 0$,

$g_{21} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 1$, $g_{23} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$, $g_{24} := g(\vec{e}_2, \vec{e}_4) = 0$,

$g_{31} := g(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$, $g_{32} := g(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0$, $g_{34} := g(\vec{e}_3, \vec{e}_4) = 0$,

$g_{41} := g(\vec{e}_4, \vec{e}_1) = 1$, $g_{42} := g(\vec{e}_4, \vec{e}_2) = 0$, $g_{43} := g(\vec{e}_4, \vec{e}_3) = 0$, adică matricea formei biliniare este

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se dă forma biliniară $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Să se precizeze dacă forma biliniară g este sau nu simetrică şi să se determine matricea formei g în raport cu baza canonică. De asemenea, să se scrie matricea formei g în baza formată de vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{f}_4 = (1, 0, 0, 1)$.

Rezolvare:

Matricea formei biliniare g se scrie calculând $g_{ij} := g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j = \overline{1,4}$, unde $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^4$.

Obţinem

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi deci forma biliniară se scrie matriceal sub forma

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot G \cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{y}$.

Se citeşte matricea S a schimbării de baze de la canonică B_c la noua bază $\bar{B} := \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4\right\} = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1)\}$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conform teoriei, matricea $\bar{G}$ în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de formula

$$\bar{G} = S^t \cdot G \cdot S$$

deci

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Se dă forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(\vec{x}) = (x_1)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine h, să se determine matricea formei pătratice h în raport cu baza canonică şi să se determine rangul lui h.

   (b) Să se aducă forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss.

Rezolvare:

(a) Reamintim că, prin definiţie, pentru forma pătratică h, există o formă biliniară simetrică g astfel încât $h(\vec{x}) := g(\vec{x}, \vec{x})$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. g se numește forma polară a lui h.

g se obține prin procedeul de dedublare prin care înlocuim în modul următor:

$$\begin{aligned} (x_i)^2 &\rightsquigarrow x_i y_i \\ x_i x_j &\rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i), \ \forall i, j. \end{aligned}$$

Astfel se obţine

$$\begin{aligned} g(\vec{x},\vec{y}) &= x_1y_1 + \frac{5}{4}x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2) \\ &= x_1y_1 + \frac{5}{4}x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2, \ \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ştim că

$$h(\vec{x}) = X^t \cdot G \cdot X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$, iar G este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare g.

Deci

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obţine $rangG = 3$ deci rangul formei h este 3.

(b) Vom aduce forma pătratică la forma canonică prin **metoda lui Gauss.**

În expresia lui h apare pătratul $(x_1)^2$ şi termenii x_1x_3 şi deci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_1 şi formăm un binom la pătrat.

$$\begin{aligned} &h(\vec{x}) = \left((x_1)^2 + 2x_1x_3\right) + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - x_2x_3 = (x_1+x_3)^2 - (x_3)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - x_2x_3 \\ &= (x_1+x_3)^2 + (x_3)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 - x_2x_3 = (x_1+x_3)^2 + \left((x_3)^2 - x_2x_3\right) + \frac{5}{4}(x_2)^2 \\ &= (x_1+x_3)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{5}{4}(x_2)^2 = (x_1+x_3)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + (x_2)^2 \\ &= (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_2. \end{cases} \tag{15}$$

Să determinăm în continuare baza $\bar{B}$ în raport cu care forma pătratică h are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul (15) astfel încât să determinăm coordonatel x_i în raport de coordonatele y_j. Vom obţine

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3\,. \end{cases}$$

deci

$$X = SY,$$

unde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dar, prin definiţie, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \left\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right\}$ în raport cu care forma pătratică h are forma canonică $h(\vec{x}) = (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2$. Remarcăm că am obținut direct forma normală a lui h.

Deci citim coordonatele de pe coloanele matricii S şi obţinem $\vec{f_1} = (1,0,0)$, $\vec{f_2} = (-1,0,1)$, $\vec{f_3} = (-1/2, 1, 1/2)$.

Evident, forma pătratică are în raport cu această nouă bază matricea $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece toţi coeficienţii din forma canonică sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

4. Se dă forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(\vec{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Să se determine forma polară a lui h, matricea formei pătratice h în raport cu baza canonică şi să se calculeze rangul lui h.

(b) Să se aducă forma canonică la forma pătratică prin metoda lui Gauss.

Rezolvare:

(a) Forma biliniară simetrică din care provine h se scrie prin procedeul de dedublare şi se obţine

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, \vec{y}) &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 4\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 4\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1,\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Obținem

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$rangG = 3$ deci rangul formei h este 3.

(b) Vom aduce forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss

În cazul nostru, apare pătratul $5(x_1)^2$ şi termenii x_1x_2, x_1x_3. Apare şi pătratul $6(x_2)^2$ şi apoi x_1x_2. Alegem, pentru simplitate, să plecăm de la termenul x_2 şi deci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_2.

$$\begin{aligned} h(\vec{x}) &= \left(6(x_2)^2 - 4x_1x_2\right) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}\left((6x_2)^2 - 24x_1x_2\right) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 - \frac{1}{6}(2x_1)^2 + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{13}{3}(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \left(\frac{13}{3}(x_1)^2 - 4x_1x_3\right) + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\left(\frac{13}{3}x_1\right)^2 - \frac{13}{3}4x_1x_3\right) + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}x_1 - 2x_3\right)^2 - \frac{3}{13}(2x_3)^2 + 4(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}x_1 - 2x_3\right)^2 + \frac{40}{13}(x_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{3}{13}(y_2)^2 + \frac{40}{13}(y_3)^2, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = 6x_2 - 2x_1 \\ y_2 = \dfrac{13}{3}x_1 - 2x_3 \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Deoarece toţi coeficienţii $1/6, 3/13$ şi $40/13$ sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

5. Se dă forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(\vec{x}) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Să se determine forma biliniară simetrică din care provine h, matricea formei pătratice h în raport cu baza canonică şi să se calculeze rangul formei.

   (b) Să se aducă forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss și să se determine si baza Gauss.

   Rezolvare:

   (a) Forma biliniară polară a lui h este

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, \vec{y}) &= 2\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 6\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - 6\frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_1) \\ &= x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_1, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

   Avem

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Se obţine $rangA = 3$ deci rangul formei h este 3.

   (b) În cazul nostru, nu apare nici un pătrat dar apare termenul x_1x_2, deci, conform teoriei, facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3. \end{cases} \tag{16}$$

   Înlocuind obţinem

$$\begin{aligned} &h(\vec{x}) = 2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - 6(y_1 - y_2)y_3 - 6(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 - 6y_1y_3 - 6y_2y_3 = \\ &= 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 12y_1y_3 \end{aligned}$$

   iar acum se aplică tehnica de formare de pătrate. Vom obţine

$$\begin{aligned} &h(\vec{x}) = 2(y_1)^2 - 2(y_2)^2 - 12y_1y_3 = \left(2(y_1)^2 - 12y_1y_3\right) - 2(y_2)^2 = \frac{1}{2}\left((2y_1)^2 - 24y_1y_3\right) - 2(y_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2y_1 - 6y_3)^2 - \frac{1}{2}(6y_3)^2 - 2(y_2)^2 = \frac{1}{2}(z_1)^2 - 2(z_2)^2 - 18(z_3)^2, \end{aligned}$$

   unde

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - 6y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3\,. \end{cases} \tag{17}$$

   Să determinăm în continuare baza $\bar{B}$ în raport cu care forma pătratică h are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemele (16) şi (17) astfel încât să determinăm coordonatel x_i în raport de coordonatele z_j. Vom obţine

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + 6z_3) - z_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}(z_1 + 6z_3) + z_2 \\ x_3 = z_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 - z_2 + 3z_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

deci

$$X = SZ,$$

unde

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dar, prin definiţie, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$ în raport cu care forma pătratică h are forma canonică $\mathcal{Q}(\vec{x}) = \frac{1}{2}(z_1)^2 - 2(z_2)^2 - 18(z_3)^2$.

Deci $\vec{f}_1 = (1/2, 1/2, 0)$, $\vec{f}_2 = (-1, 1, 0)$, $\vec{f}_3 = (3, 3, 1)$.

Evident, din forma canonică, deducem că forma pătratică are în raport cu această nouă bază matricea $\bar{G} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$.

Pe de altă parte avem formula

$$\bar{G} = S^t \cdot G \cdot S,$$

deci se poate face şi proba, calculând produsul $S^t \cdot G \cdot S$ şi obţinând exact matricea diagonală $\bar{G}$ de mai sus.

Din forma canonică deducem că forma pătratică dată este nedefinită.

6. Se dă forma pătratică $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(\vec{x}) = 2(x_1)^2 + 3(x_3)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Să se aducă h la forma canonică prin metoda lui Jacobi și să se determine baza Jacobi.
Rezolvare:

Matricea lui h în baza canonică este

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculăm determinanții $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_3 = \det G = -3$. Deoarece toți sunt nenuli, rezultă că există o bază $\bar{B} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$ în raport cu care h are forma canonică

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_1}(y_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y_2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(y_3)^2 = \frac{1}{2}(y_1)^2 - 2(y_2)^2 + \frac{1}{3}(y_3)^2,$$

unde $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{3} y_i \vec{f}_i$. Deducem că h este nedefinită.
Baza Jacobi se caută sub forma

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} se face impunând condiţiile suplimentare

$$g(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j, \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

Obținem $\vec{f}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (-1, -2, 0)$, $\vec{f}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.